4　ポートフォリオの期待収益率と収益率の分散の関係

$x_a+x_b=1$ の下でのポートフォリオの期待収益率と収益率の分散の関係を明らかにしよう。以下では、簡単化のためにそれぞれの期待収益率を $E\left[\tilde{R}_p\right]=\mu_p$、$E\left[\tilde{R}_a\right]=\mu_a$、$E\left[\tilde{R}_b\right]=\mu_b$、分散を $\sigma^2\left[\tilde{R}_p\right]=\sigma_p^2$、$\sigma^2\left[\tilde{R}_a\right]=\sigma_a^2$、$\sigma^2\left[\tilde{R}_b\right]=\sigma_b^2$（したがって標準偏差は、$\sigma\left[\tilde{R}_a\right]=\sigma_a$、$\sigma\left[\tilde{R}_b\right]=\sigma_b$)、共分散を $\mathrm{cov}\left[a,b\right]=\sigma_{ab}$、相関係数を ρ_{ab}、A の組み入れ比率を $x_a=x$（したがって $x_b=1-x$）で表わすことにする。

以上のような設定の下では、(1) 式、(2) 式は以下のように書き換えることができる。

$$\mu_p = x\mu_a + (1-x)\mu_b \tag{4}$$

$$\sigma_p^2 = x^2\sigma_a^2 + (1-x)^2\sigma_b^2 + 2\rho_{ab}x(1-x)\sigma_a\sigma_b \tag{5}$$

(4) 式より

$$\begin{aligned} \mu_p - \mu_b &= x(\mu_a - \mu_b) \\ x &= \frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b} \end{aligned} \tag{6}$$

(6) 式を (5) 式に代入することで、ポートフォリオの期待収益率 μ_p と収益率の分散 σ_p^2 の関係、すなわち、いわゆるリターンとリスクの関係が示されることになる。そこで実際に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \left(\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)^2\sigma_a^2 + \left(1-\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)^2\sigma_b^2 \\
&\quad +2\rho_{ab}\left(\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)\left(1-\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)\sigma_a\sigma_b \\
&= \left(\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)^2\sigma_a^2 + \left(\frac{\mu_a-\mu_p}{\mu_a-\mu_b}\right)^2\sigma_b^2 + 2\rho_{ab}\left(\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)\left(\frac{\mu_a-\mu_p}{\mu_a-\mu_b}\right)\sigma_a\sigma_b \\
&= \frac{(\mu_p-\mu_b)^2}{(\mu_a-\mu_b)^2}\sigma_a^2 + \frac{(\mu_a-\mu_p)^2}{(\mu_a-\mu_b)^2}\sigma_b^2 + 2\rho_{ab}\frac{(\mu_p-\mu_b)(\mu_a-\mu_p)}{(\mu_a-\mu_b)^2}\sigma_a\sigma_b
\end{aligned}$$

両辺に $(\mu_a-\mu_b)^2$ をかけて

$$\begin{aligned}
(\mu_a-\mu_b)^2\sigma_p^2 &= (\mu_p-\mu_b)^2\sigma_a^2 + (\mu_a-\mu_p)^2\sigma_b^2 \\
&\quad +2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b(\mu_p-\mu_b)(\mu_a-\mu_p) \\
&= \left(\mu_p^2-2\mu_p\mu_b+\mu_b^2\right)\sigma_a^2 + \left(\mu_a^2-2\mu_a\mu_p+\mu_p^2\right)\sigma_b^2 \\
&\quad +2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b\left(\mu_p\mu_a-\mu_p^2-\mu_b\mu_a+\mu_b\mu_p\right) \\
&= \mu_p^2\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b\right) \\
&\quad -2\mu_p\left(\mu_b\sigma_a^2+\mu_a\sigma_b^2-\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b(\mu_a+\mu_b)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\mu_b^2\sigma_a^2+\mu_a^2\sigma_b^2-2\rho_{ab}\mu_a\mu_p\sigma_a\sigma_b\right)\\
=\;&\mu_b^2\ \sigma_a^2+\mu_p^2\ \sigma_a^2+\mu_a^2\ \sigma_b^2+\mu_p^2\ \sigma_b^2\\
&-2\ \mu_b\ \mu_p\ \sigma_a^2-2\ \mu_a\ \mu_p\ \sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \mu_a\ \mu_b\ \sigma_a\ \sigma_b\\
&+2\ \rho_{ab}\ \mu_a\ \mu_p\ \sigma_a\ \sigma_b+2\ \rho_{ab}\ \mu_b\ \mu_p\ \sigma_a\ \sigma_b-2\ \rho_{ab}\ \mu_p^2\ \sigma_a\ \sigma_b
\end{aligned}
$$

以上より、

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2=\frac{1}{\left(\mu_a-\mu_b\right)^2}&\left(\mu_b^2\ \sigma_a^2+\mu_p^2\ \sigma_a^2+\mu_a^2\ \sigma_b^2+\mu_p^2\ \sigma_b^2\right.\\
&-2\ \mu_b\ \mu_p\ \sigma_a^2-2\ \mu_a\ \mu_p\ \sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \mu_a\ \mu_b\ \sigma_a\ \sigma_b\\
&\left.+2\ \rho_{ab}\ \mu_a\ \mu_p\ \sigma_a\ \sigma_b+2\ \rho_{ab}\ \mu_b\ \mu_p\ \sigma_a\ \sigma_b-2\ \rho_{ab}\ \mu_p^2\ \sigma_a\ \sigma_b\right) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となることがわかる。

5 最小分散ポートフォリオ

最小分散ポートフォリオ (minumum variance portfolio:MVP) とは、文字通り分散が最小となるポートフォリオのことである。(5) 式は、資産 A の組み入れ比率 x とポートフォリオの分散 σ_p との関係を示すものであるから、(5) 式から最小分散ポートフォリオとなる資産 A の組み入れ比率 x を求めてみよう。ここで、(4) 式、(5) 式をもう一度示しておく。

$$
\begin{aligned}
\mu_p&=x\mu_a+(1-x)\,\mu_b\\
\sigma_p^2&=x^2\sigma_a^2+(1-x)^2\,\sigma_b^2+2\rho_{ab}x\,(1-x)\,\sigma_a\sigma_b
\end{aligned}
$$

$\min\limits_x \sigma_p^2$ の 1 階の条件は、$\frac{d\sigma_p^2}{dx}=0$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma_p^2}{dx}&=2\ \sigma_a^2x-2\sigma_b^2\,(1-x)+2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b\,(1-x)-2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_bx\\
&=2\sigma_a^2x-2\sigma_b^2+2\sigma_b^2x+2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b-2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_bx-2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_bx=0
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
\left(2\ \sigma_a^2+2\ \sigma_b^2\ -4\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b\right)x&=2\ \sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b\\
x&=\frac{2\ \sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}{2\ \sigma_a^2+2\ \sigma_b^2-4\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}\\
&=\frac{\sigma_b^2-\rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\,\rho_{ab}\,\sigma_a\,\sigma_b} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

を満たす組み入れ比率が最小分散ポートフォリオの条件となる。

さらに、(8) 式より、

$$\begin{aligned}1-x &= 1-\frac{\sigma_b^2-\rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b} \\ &= \frac{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b-\sigma_b^2+\rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b} \\ &= \frac{\sigma_a^2-\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b} \qquad (9)\end{aligned}$$

であるから、(8) 式、(9) 式を (4) 式に代入して、

$$\begin{aligned}\mu_p &= \left(\frac{\sigma_b^2-\rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}\right)\mu_a+\left(\frac{\sigma_a^2-\rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}\right)\mu_b \\ &= \frac{\mu_b\ \sigma_a^2-\rho_{ab}\ \mu_a\ \sigma_a\ \sigma_b-\rho_{ab}\ \mu_b\ \sigma_a\ \sigma_b+\mu_a\ \sigma_b^2}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b} \\ &= \frac{\mu_a\ \sigma_b\ (-\rho_{ab}\ \sigma_a+\sigma_b)+\mu_b\ \sigma_a\ (\sigma_a-\rho_{ab}\ \sigma_b)}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\ \rho_{ab}\ \sigma_a\ \sigma_b}\end{aligned}$$

$$\left(-\sigma_a^2+2\ \rho\ \sigma_a\ \sigma_b-\sigma_b^2\right)\ \sigma_p=\left(-1+\rho^2\right)\ \sigma_a^2\ \sigma_b^2$$

$$\{\{\sigma_p\to\frac{(-1+\rho^2)\ \sigma_a^2\ \sigma_b^2}{-\sigma_a^2+2\ \rho\ \sigma_a\ \sigma_b-\sigma_b^2}\}\}$$

$$\{\{\sigma_p\to-\frac{(-1+\rho^2)\ \sigma_a^2\ \sigma_b^2}{\sigma_a^2-2\ \rho\ \sigma_a\ \sigma_b+\sigma_b^2}\}\}$$

5.1 $\rho = -1$ の場合

5.1.1 (5) 式からの検討

$\rho = -1$ の場合 (5) 式は、

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= x^2\sigma_a^2 + (1-x)^2\sigma_b^2 - 2x(1-x)\sigma_a\sigma_b \\
&= \{x\sigma_a - (1-x)\sigma_b\}^2
\end{aligned}
$$

であるから、σ_p^2 は $x\sigma_a - (1-x)\sigma_b = 0$ のとき最小 ($\sigma_p^2 = 0$) となる。この条件を満たす組み入れ比率は、

$$
\begin{aligned}
x\sigma_a - (1-x)\sigma_b &= 0 \\
(\sigma_a + \sigma_b)x &= \sigma_b \\
x &= \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}
\end{aligned}
$$

であるから、資産 A,B をそれぞれ、$\frac{\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$、$\frac{\sigma_a}{\sigma_a+\sigma_b}$ だけ組み入れれば、リスクがゼロ ($\sigma_p = 0$) のポートフォリオを作成できる。またこのときのポートフォリオのリターンは、(4) 式より、

$$
\begin{aligned}
\mu_p &= \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}\mu_a + \frac{\sigma_a}{\sigma_a + \sigma_b}\mu_b \\
&= \frac{\mu_a\sigma_b + \sigma_a\mu_b}{\sigma_a + \sigma_b}
\end{aligned}
$$

である。

5.1.2 (7) 式からの検討

$\rho = -1$ の場合 (7) 式は、

$$
\begin{aligned}
(\mu_a - \mu_b)^2\sigma_p^2 &= \mu_p^2\left(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2\sigma_a\sigma_b\right) - 2\mu_p\left(\mu_b\sigma_a^2 + \mu_a\sigma_b^2 + \sigma_a\sigma_b(\mu_a + \mu_b)\right) \\
&\quad + \left(\mu_b^2\sigma_a^2 + \mu_a^2\sigma_b^2 + 2\mu_a\mu_p\sigma_a\sigma_b\right) \\
&= \mu_p^2(\sigma_a + \sigma_b)^2 - 2\mu_p\left(\mu_b\sigma_a^2 + \mu_a\sigma_b^2 + \sigma_a\sigma_b(\mu_a + \mu_b)\right) \\
&\quad + (\mu_b\sigma_a + \mu_a\sigma_b)^2
\end{aligned}
$$

となり、これを整理すると、

$$
\begin{aligned}
&(\mu_a - \mu_b)^2\sigma_p^2 - \mu_p^2(\sigma_a + \sigma_b)^2 + 2\mu_p\left(\mu_b\sigma_a(\sigma_a + \sigma_b) + \mu_a\sigma_b(\sigma_a + \sigma_b)\right) \\
&\qquad - (\mu_b\sigma_a + \mu_a\sigma_b)^2 = 0 \\
&(\mu_a - \mu_b)^2\sigma_p^2 - \mu_p^2(\sigma_a + \sigma_b)^2 \\
&\qquad + 2\mu_p\{(\mu_b\sigma_a + \mu_a\sigma_b)(\sigma_a + \sigma_b)\} - (\mu_b\sigma_a + \mu_a\sigma_b)^2 = 0
\end{aligned}
$$

因数分解して、

$$\begin{aligned}&\{(\mu_a-\mu_b)\,\sigma_p+\mu_p\,(\sigma_a+\sigma_b)\}\{(\mu_a-\mu_b)\,\sigma_p-\mu_p\,(\sigma_a+\sigma_b)\}\\&\qquad+2\mu_p\,\{(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b)\,(\sigma_a+\sigma_b)\}-(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b)^2=0\end{aligned}$$

これは、さらに次のように因数分解できる。

$$\begin{aligned}&(\{(\mu_a-\mu_b)\,\sigma_p+\mu_p\,(\sigma_a+\sigma_b)\}+(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b))\\&\times(\{(\mu_a-\mu_b)\,\sigma_p+\mu_p\,(\sigma_a+\sigma_b)\}-(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b))=0\end{aligned}$$

これを満たすには

$$\{(\mu_a-\mu_b)\,\sigma_p+\mu_p\,(\sigma_a+\sigma_b)\}+(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b)=0$$

または

$$\{(\mu_a-\mu_b)\,\sigma_p+\mu_p\,(\sigma_a+\sigma_b)\}-(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b)=0$$

が条件となる。これより、

$$\mu_p=\frac{\mu_a-\mu_b}{\sigma_a+\sigma_b}\sigma_p+\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$$

または

$$\mu_p=-\frac{\mu_a-\mu_b}{\sigma_a+\sigma_b}\sigma_p+\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$$

となり、共通の切片

$$\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$$

を持つことがわかる。これが、分散がゼロとなる場合のポートフォリオの期待収益率である。次に、分散がゼロとなるような、A と B の投資比率を求めるためには、

$$\mu_p=\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$$

となるような A,B の投資比率を求めればよいから、

$$\mu_p=x\mu_a+(1-x)\,\mu_b$$

より、

$$\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}=x\mu_a+(1-x)\,\mu_b$$

を満たす x は、

$$\begin{aligned}\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}&=x\,(\mu_a-\mu_b)+\mu_b\\x&=\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{(\sigma_a+\sigma_b)\,(\mu_a-\mu_b)}-\frac{\mu_b}{(\mu_a-\mu_b)}\\&=\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b-\mu_b\,(\sigma_a+\sigma_b)}{(\sigma_a+\sigma_b)\,(\mu_a-\mu_b)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_b\sigma_a + \mu_a\sigma_b - \mu_b\sigma_a - \mu_b\sigma_b}{(\sigma_a + \sigma_b)(\mu_a - \mu_b)} \\
&= \frac{\mu_a\sigma_b - \mu_b\sigma_b}{(\sigma_a + \sigma_b)(\mu_a - \mu_b)} \\
&= \frac{(\mu_a - \mu_b)\sigma_b}{(\sigma_a + \sigma_b)(\mu_a - \mu_b)} \\
&= \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}
\end{aligned}
$$

であることがわかる。

6 α、β の推定値

マーケット・モデルでは、第 i 番目の株式の収益率 R_i を、マーケット・ポートフォリオの収益率 R_m との関係で回帰することになる。回帰モデルを

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_i$$

とすると、定数項 α_i と回帰係数 β_i の推定値 $\hat{\alpha}_i$、$\hat{\beta}_i$ は、

$$\hat{\alpha}_i = \bar{R}_i - \hat{\beta}_i \bar{R}_m \tag{10}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2} \tag{11}$$

で求めることができる。

この時の回帰モデルが現実をどの程度説明できているかを示す決定係数 R^2 は、

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(\hat{R}_{i,t} - \bar{R}_{i,t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \bar{R}_{i,t}\right)^2} \tag{12}$$

で求めることができる。ここで $\hat{R}_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i R_{m,t}$ および (10) 式より

$$\hat{R}_{i,t} = \bar{R}_i + \hat{\beta}_i \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right) \tag{13}$$

となるから、(13) 式を (12) 式に代入すると、(12) 式は、以下のように展開できる。

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(\left\{\bar{R}_i + \beta\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\right\} - \bar{R}_i\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} \left\{\beta\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\right\}^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}\beta^2$$

さらに (11) 式を代入して、

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2} \left\{ \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2} \right\}^2$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2} \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^4}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2 \sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}$$

$$= \frac{\left\{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)\right\}^2}{\sum_{t=1}^{n} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2 \sum_{t=1}^{n} \left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}$$

ここで、$\mathrm{cov}\left(R_{m,t}, R_{i,t}\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)$、$\sigma^2\left(R_{m,t}\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2$、$\sigma^2\left(R_{i,t}\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2$ という関係を利用すると、

$$= \frac{\left\{(n-1)\,\mathrm{cov}\left(R_{m,t}, R_{i,t}\right)\right\}^2}{(n-1)\,\sigma^2\left(R_{i,t}\right)(n-1)\,\sigma^2\left(R_{m,t}\right)}$$

となるから、結局

$$R^2 = \left\{\frac{\mathrm{cov}\left(R_{m,t}, R_{i,t}\right)}{\sigma\left(R_{i,t}\right)\sigma\left(R_{m,t}\right)}\right\}^2$$

となり、

$$\frac{\mathrm{cov}\left(R_{m,t}, R_{i,t}\right)}{\sigma\left(R_{i,t}\right)\sigma\left(R_{m,t}\right)} = \rho_{im}$$

なので、

$$R^2 = \left(\rho_{im}\right)^2$$

という関係があることがわかる。ここで、$-1 \leq \rho_{im} \leq 1$ なので $0 \leq R^2 \leq 1$ であることが明らかになった。