Created on May 20, 2000
by 高橋 豊治
Last printed May 22, 2000

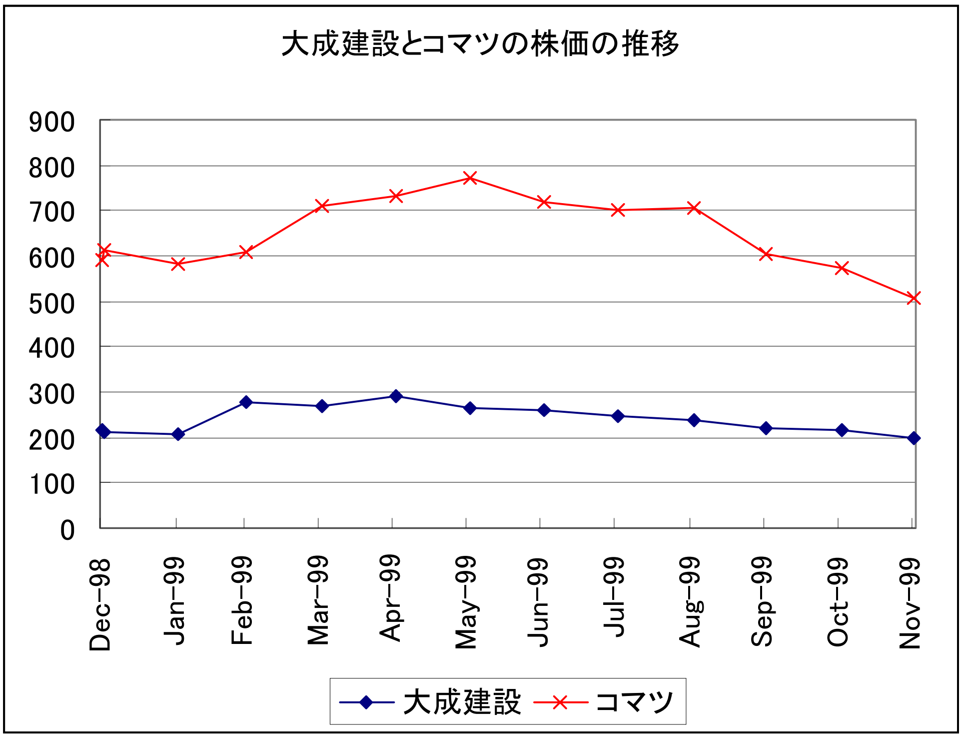
中央大学ポートフォリオ論講義資料

1. 投資のリターンとリスク

株式投資を考えよう。例として、1998 年 12 月から 1999 年 12 月までの大成建設とコマツの株価の月次終値を考えることにする。

	Dec-98	Jan-99	Feb-99	Mar-99	Apr-99	May-99	Jun-99	Jul-99	Aug-99	Sep-99	Oct-99	Nov-99	Dec-99
大成建設	217	212	206	278	268	290	266	260	245	237	220	217	199
コマツ	593	613	581	609	711	731	773	720	700	706	606	575	509

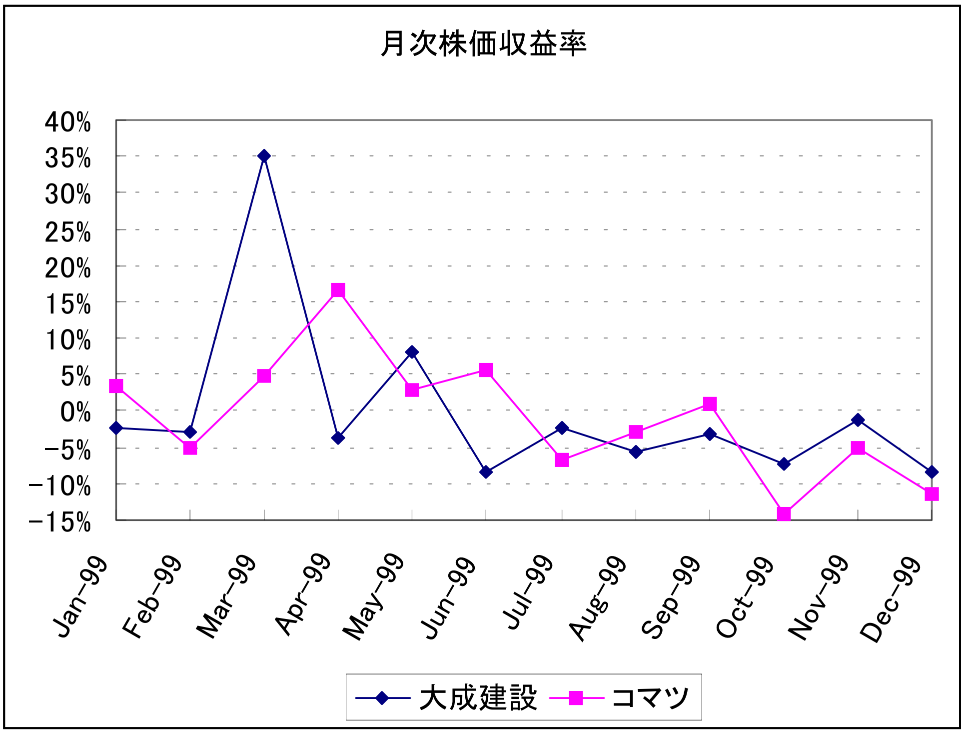
これをグラフにしたものが、下の図である。



A) **収益率の概念**

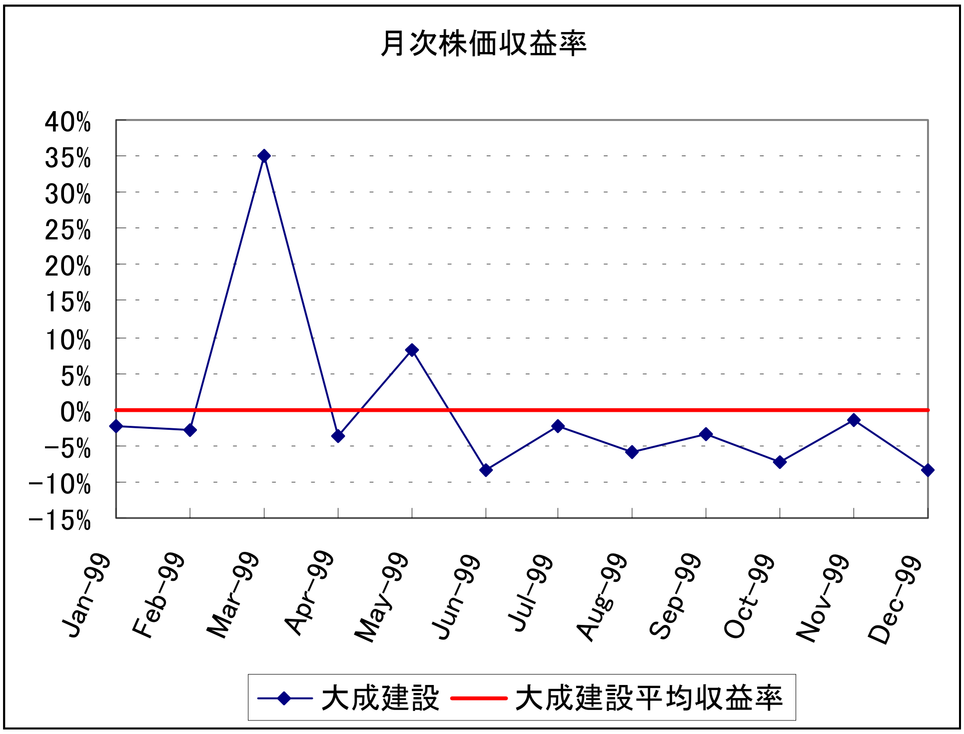
投資を判断する場合に株価で考えてよいのだろうか？

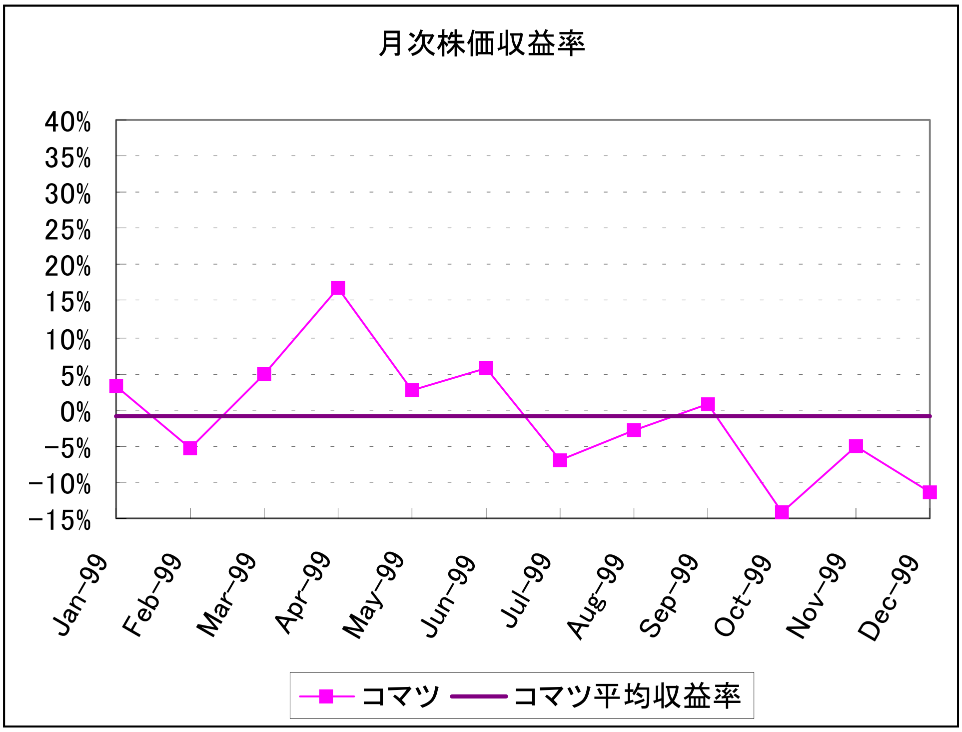
	Jan-99	Feb-99	Mar-99	Apr-99	May-99	Jun-99	Jul-99	Aug-99	Sep-99	Oct-99	Nov-99	Dec-99	平均
大成建設	-2.30%	-2.83%	34.95%	-3.60%	8.21%	-8.28%	-2.26%	-5.77%	-3.27%	-7.17%	-1.36%	-8.29%	-0.16%
コマツ	3.37%	-5.22%	4.82%	16.75%	2.81%	5.75%	-6.86%	-2.78%	0.86%	-14.16%	-5.12%	-11.48%	-0.94%



B) **平均収益率と収益率の分散**

平均収益率と実際の収益率を比較してみよう。





平均収益率も違うが、平均収益率と比較した実際の収益率のばらつきも異なっている(大成建設の方がばらつきが大きい)。

月次株価収益率の平均からの偏差(%,小数第 3 位四捨五入)

	Jan-99	Feb-99	Mar-99	Apr-99	May-99	Jun-99	Jul-99	Aug-99	Sep-99	Oct-99	Nov-99	Dec-99
大成建設	-2.14	-2.67	35.11	-3.44	8.37	-8.12	-2.1	-5.61	-3.11	-7.01	-1.2	-8.13
コマツ	4.31	-4.28	5.76	17.69	3.75	6.69	-5.92	-1.84	1.8	-13.22	-4.18	-10.54

平均収益率と比較した実際の収益率のばらつきの度合いを表わすものとして、分散・標準偏差がある。

月次株価収益率の平均からの偏差の自乗(%²,標準偏差は%。小数第 3 位四捨五入)

	Jan-99	Feb-99	Mar-99	Apr-99	May-99	Jun-99
大成建設	4.58	7.13	1232.7	11.83	70.06	65.93
コマツ	18.58	18.32	33.18	312.94	14.06	44.76

	Jul-99	Aug-99	Sep-99	Oct-99	Nov-99	Dec-99	分散	標準偏差
大成建設	4.41	31.47	9.67	49.14	1.44	66.1	129.54	11.38
コマツ	35.05	3.39	3.24	174.77	17.47	111.09	65.57	8.1

分散の定義

$$\mathrm{var}(x) = E\left[x - E[x]\right]^2$$

定義式の展開[1]

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(x) &= E\left[x - E[x]\right]^2 \\ &= E\left[x^2 - 2xE[x] + E[x]^2\right] \\ &= E\left[x^2\right] - 2E\left[xE[x]\right] + E\left[E[x]^2\right] \\ &= E\left[x^2\right] - 2E[x]^2 + E[x]^2 \\ &= E\left[x^2\right] - E[x]^2\end{aligned}$$

1 $E\left[E[x]\right] = E[x]$という性質を利用

分散・標準偏差は、広く一般的に利用されているが、このほかにも平均からの偏差の絶対値の平均で、実際の収益率の、平均収益率に対する散らばり度合いを表わすこともできる。

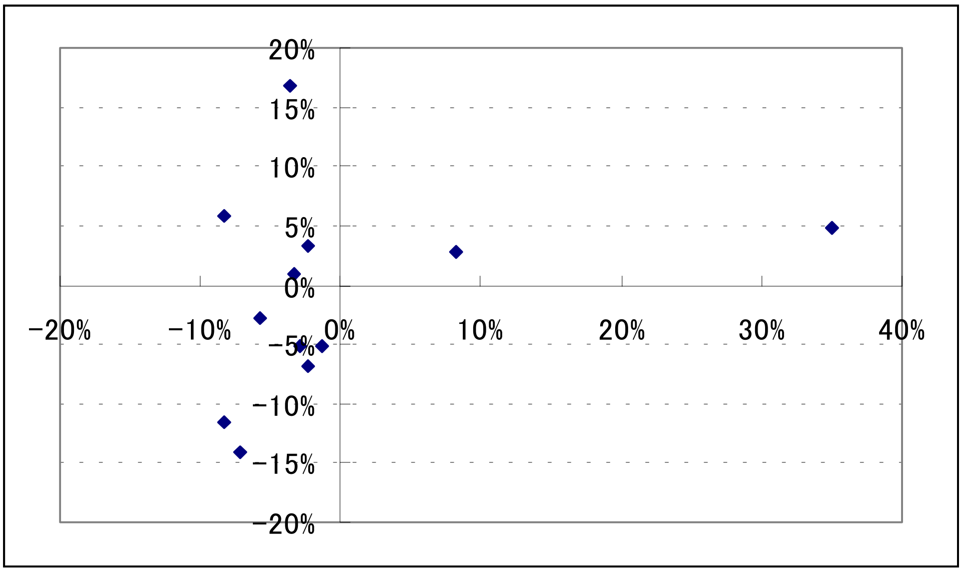
月次株価収益率の平均からの偏差の絶対値(%,小数第 3 位四捨五入)

	Jan-99	Feb-99	Mar-99	Apr-99	May-99	Jun-99	Jul-99	Aug-99	Sep-99	Oct-99	Nov-99	Dec-99	平均
大成建設	2.14	2.67	35.11	3.44	8.37	8.12	2.1	5.61	3.11	7.01	1.2	8.13	7.25
コマツ	4.31	4.28	5.76	17.69	3.75	6.69	5.92	1.84	1.8	13.22	4.18	10.54	6.67

2. 2資産の収益率の関係

A) 散らばり具合の関係(共分散・相関係数の概念)

2資産の収益率の関係を散布図にしてみよう。



月次株価収益率の平均からの偏差の積(%²,小数第3位四捨五入)

	Jan-99	Feb-99	Mar-99	Apr-99	May-99	Jun-99
大成建設×コマツ	-9.22	11.43	202.23	-60.85	31.39	-54.32

Jul-99	Aug-99	Sep-99	Oct-99	Nov-99	Dec-99	平均
12.43	10.32	-5.6	92.67	5.02	85.69	26.7658

共分散の定義

$$\operatorname{cov}(x,y)=E\left[\left(x-E[x]\right)\left(y-E[y]\right)\right]$$

共分散定義式の展開[2]

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x,y)&=E\left[\left(x-E[x]\right)\left(y-E[y]\right)\right]\\&=E\left[xy-xE[y]-yE[x]+E[x]E[y]\right]\\&=E[xy]-E[x]E[y]-E[y]E[x]+E[x]E[y]\\&=E[xy]-E[y]E[x]\end{aligned}$$

---

[2] $E\left[E[x]\right]=E[x]$という性質を利用

3. ポートフォリオの期待収益率と投資リスク(2 資産の場合)

A) ポートフォリオの収益率

ポートフォリオの収益率$\widetilde{R_p}$は、それぞれの資産の収益率$\widetilde{R_1}$、$\widetilde{R_2}$とそれぞれの資産への投資比率w、$1-w$に依存する。

$$\widetilde{R_p} = w\widetilde{R_1} + (1-w)\widetilde{R_2}$$

B) ポートフォリオの平均収益率

ポートフォリオの平均収益率$\mathrm{E}\left[\widetilde{R_p}\right]$は、それぞれの資産の平均収益率$\mathrm{E}\left[\widetilde{R_1}\right]$、$\mathrm{E}\left[\widetilde{R_2}\right]$とそれぞれの資産への投資比率$w$、$1-w$に依存する。

$$\mathrm{E}\left[\widetilde{R_p}\right] = w\mathrm{E}\left[\widetilde{R_1}\right] + (1-w)\mathrm{E}\left[\widetilde{R_2}\right]$$

あるいは記号を簡単にするために平均収益率を$\mathrm{E}\left[\widetilde{R}\right] = \mu$として、

$$\mu_p = w\mu_1 + (1-w)\mu_2$$

C) ポートフォリオの収益率の分散

ポートフォリオの収益率の分散$\mathrm{var}\left[\widetilde{R_p}\right]$は、それぞれの資産の収益率の分散$\mathrm{var}\left[\widetilde{R_a}\right]$、$\mathrm{var}\left[\widetilde{R_b}\right]$と収益率の共分散$\mathrm{cov}\left[\widetilde{R_a}, \widetilde{R_b}\right]$、それぞれの資産への投資比率$w$、$1-w$に依存する。

$$\mathrm{var}\left(\widetilde{R_p}\right) = w^2\mathrm{var}\left(\widetilde{R_1}\right) + (1-w)^2\mathrm{var}\left(\widetilde{R_2}\right) + 2w(1-w)\mathrm{cov}\left(\widetilde{R_1}, \widetilde{R_2}\right)$$

あるいは記号を簡単にするために収益率の分散を$\mathrm{var}\left[\widetilde{R}\right] = \sigma^2$、共分散を$\mathrm{cov}\left[\widetilde{R_a}, \widetilde{R_b}\right] = \sigma_{ab}$として、

$$\sigma_p^{\ 2} = w^2\sigma_a^{\ 2} + (1-w)^2\sigma_b^{\ 2} + 2w(1-w)\sigma_{ab}$$

さらに、2 資産の収益率の相関係数ρ_{ab}、それぞれの資産の収益率の標準偏差σ_a、σ_bを利用すれば、

$$\sigma_p{}^2 = w^2\sigma_a{}^2 + (1-w)^2\sigma_b{}^2 + 2w(1-w)\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b$$

D) 平均収益率の式の導出

２種類の資産 A,B からなるポートフォリオの収益率 $\tilde{R}_p$ は、A,B の組み入れ比率 x_a、x_b と、

それぞれの収益率 $\tilde{R}_a$、$\tilde{R}_b$ とで、以下のように表わすことができる。

$$\tilde{R}_p = x_a\tilde{R}_a + x_b\tilde{R}_b \qquad (3)式$$

ここで、このポートフォリオの期待収益率 $E\left(\tilde{R}_p\right)$ は、(3)式より

$$E\left(\tilde{R}_p\right) = E\left(x_a\tilde{R}_a + x_b\tilde{R}_b\right)$$

となるから、これを展開して、

$$E\left(\tilde{R}_p\right) = E\left(x_a\tilde{R}_a\right) + E\left(x_b\tilde{R}_b\right)$$

$$E\left(\tilde{R}_p\right) = x_aE\left(\tilde{R}_a\right) + x_bE\left(\tilde{R}_b\right)$$

が得られる。

E) ポートフォリオの分散式の導出

ポートフォリオの分散 $\sigma_p{}^2$ は、

$$\sigma_p{}^2 = E\left[\left(\tilde{R}_p\right)^2\right] - \left(E\left[\tilde{R}_p\right]\right)^2$$

より、これを展開すると、

$$\begin{aligned}\sigma_p{}^2 &= E\left[\left(x_a\tilde{R}_a + x_b\tilde{R}_b\right)^2\right] - \left(E\left[x_a\tilde{R}_a + x_b\tilde{R}_b\right]\right)^2\\ &= E\left[x_a{}^2\tilde{R}_a{}^2 + x_b{}^2\tilde{R}_b{}^2 + 2x_a\tilde{R}_ax_b\tilde{R}_b\right]\\ &\quad -\left\{E\left[x_a\tilde{R}_a\right]^2 + E\left[x_b\tilde{R}_b\right]^2 + 2E\left[x_a\tilde{R}_a\right]E\left[x_b\tilde{R}_b\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\sigma_p{}^2 = \left\{ E\left[x_a{}^2 \tilde{R}_a{}^2 \right] + E\left[x_b{}^2 \tilde{R}_b{}^2 \right] + E\left[2x_a \tilde{R}_a x_b \tilde{R}_b \right] \right\}$$
$$- \left\{ E\left[x_a \tilde{R}_a \right]^2 + E\left[x_b \tilde{R}_b \right]^2 + 2E\left[x_a \tilde{R}_a \right] E\left[x_b \tilde{R}_b \right] \right\}$$

$$\sigma_p{}^2 = x_a{}^2 E\left[\tilde{R}_a{}^2 \right] + x_b{}^2 E\left[\tilde{R}_b{}^2 \right] + 2x_a x_b E\left[\tilde{R}_a \tilde{R}_b \right]$$
$$- x_a{}^2 E\left[\tilde{R}_a \right]^2 - x_b{}^2 E\left[\tilde{R}_b \right]^2 - 2x_a x_b E\left[\tilde{R}_a \right] E\left[\tilde{R}_b \right]$$

$$\sigma_p{}^2 = x_a{}^2 \left(E\left[\tilde{R}_a{}^2 \right] - E\left[\tilde{R}_a \right]^2 \right) + x_b{}^2 \left(E\left[\tilde{R}_b{}^2 \right] - E\left[\tilde{R}_b \right]^2 \right)$$
$$+ 2x_a x_b \left(E\left[\tilde{R}_a \tilde{R}_b \right] - E\left[\tilde{R}_a \right] E\left[\tilde{R}_b \right] \right)$$

ここで、

$$\sigma_a{}^2 = E\left[\left(\tilde{R}_a \right)^2 \right] - \left(E\left[\tilde{R}_a \right] \right)^2 、$$

$$\sigma_b{}^2 = E\left[\left(\tilde{R}_b \right)^2 \right] - \left(E\left[\tilde{R}_b \right] \right)^2 、$$

$$\sigma_{ab} = E\left[\left(\tilde{R}_a \right) \left(\tilde{R}_b \right) \right] - E\left[\tilde{R}_a \right] E\left[\tilde{R}_b \right]$$

より

$$\sigma_p{}^2 = x_a{}^2 \sigma_a{}^2 + x_b{}^2 \sigma_b{}^2 + 2x_a x_b \sigma_{ab}$$

が導出される。

4. ポートフォリオの期待収益率と収益率の分散の関係

A) 関係の導出

$x_a + x_b = 1$の下でのポートフォリオの期待収益率と収益率の分散の関係を明らかにしよう。

以下では、簡単化のためにそれぞれの期待収益率を$E\left(\tilde{R}_p\right)=\mu_p$、$E\left(\tilde{R}_a\right)=\mu_a$、$E\left(\tilde{R}_b\right)=\mu_b$、分散を$\sigma^2\left(\tilde{R}_p\right)=\sigma_p{}^2$、$\sigma^2\left(\tilde{R}_a\right)=\sigma_a{}^2$、$\sigma^2\left(\tilde{R}_b\right)=\sigma_b{}^2$（したがって標準偏差は、$\sigma\left(\tilde{R}_a\right)=\sigma_a$、$\sigma\left(\tilde{R}_b\right)=\sigma_b$）、共分散を$\operatorname{cov}(a,b)=\sigma_{ab}$、相関係数を$\rho_{ab}$、A の組み入れ比率を$x_a = x$（したがって$x_b = 1-x$）で表わすことにする。

以上のような設定の下では、(1)式、(2)式は以下のように書き換えることができる。

$$\mu_p = x\mu_a + (1-x)\mu_b \qquad \text{(1)'式}$$

$$\sigma_p{}^2 = x^2\sigma_a{}^2 + (1-x)^2\sigma_b{}^2 + 2\rho_{ab}x(1-x)\sigma_a\sigma_b \qquad \text{(2)'式}$$

(1)'式より

$$\mu_p - \mu_b = x(\mu_a - \mu_b)$$

$$\therefore x = \frac{\mu_p - \mu_b}{\mu_a - \mu_b} \qquad \text{(1)"式}$$

(1)"式を(2)'式に代入することで、ポートフォリオの期待収益率μ_pと収益率の分散$\sigma_p{}^2$の関係、すなわち、いわゆるリターンとリスクの関係が示されることになる。そこで実際に代入して整理すると、

$$\sigma_p{}^2 = \left(\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)^2\sigma_a{}^2 + \left(1-\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)^2\sigma_b{}^2 + 2\rho_{ab}\left(\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)\left(1-\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)\sigma_a\sigma_b$$

$$= \left(\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)^2\sigma_a{}^2 + \left(\frac{\mu_a-\mu_p}{\mu_a-\mu_b}\right)^2\sigma_b{}^2 + 2\rho_{ab}\left(\frac{\mu_p-\mu_b}{\mu_a-\mu_b}\right)\left(\frac{\mu_a-\mu_p}{\mu_a-\mu_b}\right)\sigma_a\sigma_b$$

$$= \frac{(\mu_p-\mu_b)^2}{(\mu_a-\mu_b)^2}\sigma_a{}^2 + \frac{(\mu_a-\mu_p)^2}{(\mu_a-\mu_b)^2}\sigma_b{}^2 + 2\rho_{ab}\frac{(\mu_p-\mu_b)(\mu_a-\mu_p)}{(\mu_a-\mu_b)^2}\sigma_a\sigma_b$$

両辺に$(\mu_a-\mu_b)^2$をかけて

$$\left(\mu_a-\mu_b\right)^2\sigma_p{}^2=\left(\mu_p-\mu_b\right)^2\sigma_a{}^2+\left(\mu_a-\mu_p\right)^2\sigma_b{}^2+2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b\left(\mu_p-\mu_b\right)\left(\mu_a-\mu_p\right)$$

これを整理すると

$$\begin{aligned}\left(\mu_a-\mu_b\right)^2\sigma_p{}^2&=\left(\mu_p{}^2-2\mu_p\mu_b+\mu_b{}^2\right)\sigma_a{}^2+\left(\mu_a{}^2-2\mu_a\mu_p+\mu_p{}^2\right)\sigma_b{}^2\\&\quad+2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b\left(\mu_p\mu_a-\mu_p{}^2-\mu_b\mu_a+\mu_b\mu_p\right)\\&=\mu_p{}^2\left(\sigma_a{}^2+\sigma_b{}^2-2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b\right)-2\mu_p\left(\mu_b\sigma_a{}^2+\mu_a\sigma_b{}^2-\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b\left(\mu_a+\mu_b\right)\right)\\&\quad+\left(\mu_b{}^2\sigma_a{}^2+\mu_a{}^2\sigma_b{}^2-2\rho_{ab}\mu_a\mu_p\sigma_a\sigma_b\right)\cdots(3)\end{aligned}$$

B) **ρ＝－1 の場合のポートフォリオのリターンとリスク**

ρ＝－1 の場合(3)式は、

$$\begin{aligned}\left(\mu_a-\mu_b\right)^2\sigma_p{}^2&=\mu_p{}^2\left(\sigma_a{}^2+\sigma_b{}^2+2\sigma_a\sigma_b\right)-2\mu_p\left(\mu_b\sigma_a{}^2+\mu_a\sigma_b{}^2+\sigma_a\sigma_b\left(\mu_a+\mu_b\right)\right)\\&\quad+\left(\mu_b{}^2\sigma_a{}^2+\mu_a{}^2\sigma_b{}^2+2\mu_a\mu_p\sigma_a\sigma_b\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\mu_a-\mu_b\right)^2\sigma_p{}^2&=\mu_p{}^2\left(\sigma_a+\sigma_b\right)^2-2\mu_p\left(\mu_b\sigma_a{}^2+\mu_a\sigma_b{}^2+\sigma_a\sigma_b\left(\mu_a+\mu_b\right)\right)\\&\quad+\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)^2\end{aligned}$$

となり、これを整理すると、

$$\begin{aligned}&\left(\mu_a-\mu_b\right)^2\sigma_p{}^2-\mu_p{}^2\left(\sigma_a+\sigma_b\right)^2+2\mu_p\left(\mu_b\sigma_a\left(\sigma_a+\sigma_b\right)+\mu_a\sigma_b\left(\sigma_a+\sigma_b\right)\right)\\&\quad-\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)^2=0\end{aligned}$$

$$\left(\mu_a-\mu_b\right)^2\sigma_p{}^2-\mu_p{}^2\left(\sigma_a+\sigma_b\right)^2+2\mu_p\left\{\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)\left(\sigma_a+\sigma_b\right)\right\}-\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)^2=0$$

因数分解して、

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\mu_a-\mu_b\right)\sigma_p+\mu_p\left(\sigma_a+\sigma_b\right)\right\}\left\{\left(\mu_a-\mu_b\right)\sigma_p-\mu_p\left(\sigma_a+\sigma_b\right)\right\}\\&+2\mu_p\left\{\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)\left(\sigma_a+\sigma_b\right)\right\}-\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)^2=0\end{aligned}$$

これは、さらに次のように因数分解できる。

$$\begin{aligned}&\left[\left\{\left(\mu_a-\mu_b\right)\sigma_p+\mu_p\left(\sigma_a+\sigma_b\right)\right\}+\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)\right]\\&\times\left[\left\{\left(\mu_a-\mu_b\right)\sigma_p+\mu_p\left(\sigma_a+\sigma_b\right)\right\}-\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)\right]=0\end{aligned}$$

これを満たすには

$$\left\{\left(\mu_a-\mu_b\right)\sigma_p+\mu_p\left(\sigma_a+\sigma_b\right)\right\}+\left(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b\right)=0$$

または

$$\left\{(\mu_a-\mu_b)\sigma_p+\mu_p(\sigma_a+\sigma_b)\right\}-(\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b)=0$$

が条件となる。これより、

$$\mu_p=\frac{\mu_a-\mu_b}{\sigma_a+\sigma_b}\sigma_p+\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$$

または

$$\mu_p=-\frac{\mu_a-\mu_b}{\sigma_a+\sigma_b}\sigma_p+\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$$

となり、共通の切片 $\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$ を持つことがわかる。これが、分散がゼロとなる場合のポートフォリオの期待収益率である。

次に、分散がゼロとなるような、A と B の投資比率を求めるためには、$\mu_p=\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}$ となるような A,B の投資比率を求めればよいから、

$$\mu_p=x\mu_a+(1-x)\mu_b$$

より、

$$\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}=x\mu_a+(1-x)\mu_b$$

を満たす x は、

$$\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{\sigma_a+\sigma_b}=x(\mu_a-\mu_b)+\mu_b$$

$$x=\frac{\mu_b\sigma_a+\mu_a\sigma_b}{(\sigma_a+\sigma_b)(\mu_a-\mu_b)}-\frac{\mu_b}{(\mu_a-\mu_b)}$$