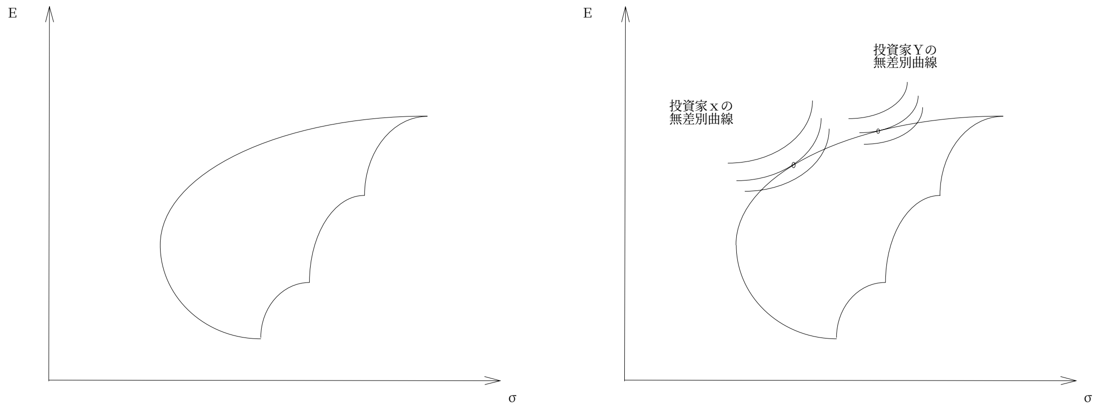
01/10/15
ポートフォリオ論資料
担当：高橋豊治

1　最適ポートフォリオの決定メカニズム

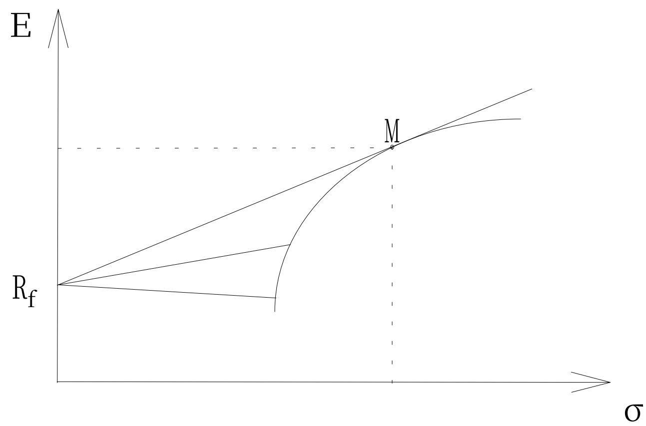
(1)株式のみから構成されるポートフォリオの場合

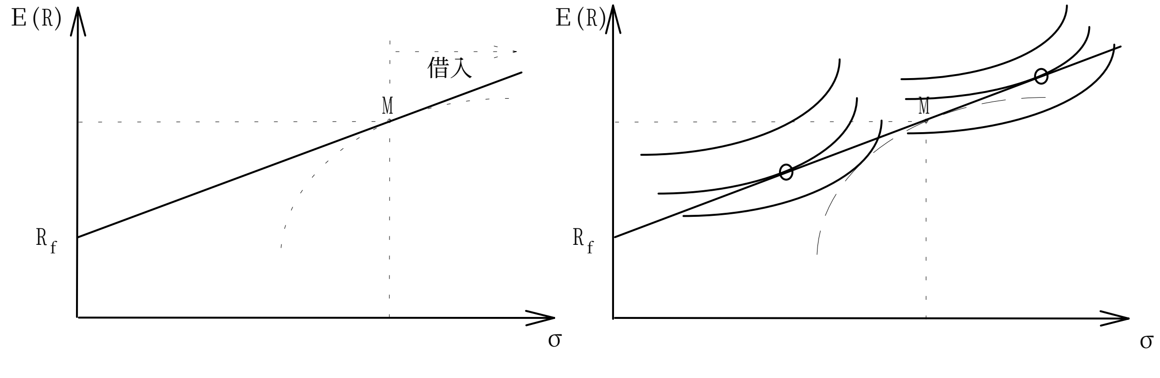
図1 株式のみから構成されるポートフォリオのリスクとリターンの関係



(2)安全資産が含まれるポートフォリオの場合

図2 安全資産が含まれるポートフォリオのリスクとリターンの関係





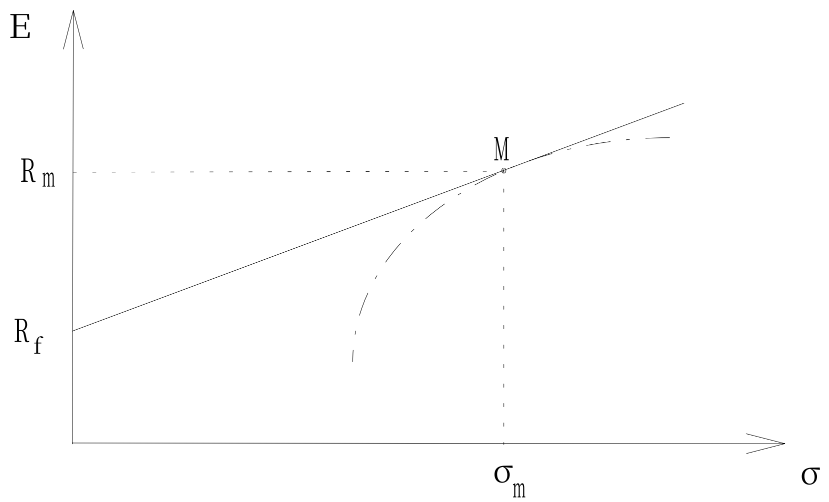
(3)分離定理

安全資産と危険資産が存在する場合、最適な危険資産のポートフォリオの決定と最適な危険資産ポートフォリオと安全資産の投資比率の決定は、各々別々に行なわれる。

(4)マーケット・ポートフォリオ

今までの話は、個々の投資家がどのようにして最適ポートフォリオを選択するかについての理論でしたが、ここからはマーケット全体について考えてみましょう。そのために【同質的期待】という仮定をおきます。すべての投資家同質的期待を持っている、すなわち、第i番目の株式の収益率$\tilde{R}_i$に関して、すべての投資家の期待収益率$E\left(\tilde{R}_i\right)$と分散$\sigma^2\left(\tilde{R}_i\right)$が等しく、さらに、第$i$番目と第$j$番目の株式の収益率の共分散$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j\right)$が等しいと仮定すると、すべての投資家にとっての最適ポートフォリオは同じものとなるはずです。そこで安全資産と株式の組み合わせからなる有効フロンティアを考えると、**(2)**で考えたように、安全資産の収益率を切片とする直線となります。

図3 マーケットの有効フロンティア



この時、最適ポートフォリオにおける危険資産の組み入れ比率は、図3の M点で示されています。先程の分離定理とあわせて考えると、すべての投資家は、危険資産としては、M点の組み合わせで示されるポートフォリオを選択し、さらに、各自の無差別曲線にしたがって[1]、安全資産と危険資産ポートフォリオの組み合わせを選択することになります。

このように考えると、M点のポートフォリオはすべての投資家にとって共通のポートフォリオであり、このM点で示されるポートフォリオを【マーケット・ポートフォリオ】と呼んでいます。さらに、市場における需給が一致している、つまり、【市場均

1無差別曲線の形状を【リスク回避度】という言葉で表わすのが一般的です。

衡】にあれば、マーケット・ポートフォリオは、市場で取引されるすべてのポートフォリオを含んでいなければならないことになります。

2　マーケット・モデル

(1)マーケット・モデル

マーケット・モデルは、個別株式の収益率を単一の指標で説明しようとする、いわゆる単一指標モデル(SIM：Single Index Model)です。単一指標モデルでは、第i番目の株式の収益率を単一の指標$\tilde{I}$で説明しようとするものです。したがって、単一指標モデルによる第i番目の株式の収益率$\tilde{R}_i$は、

$$\tilde{R}_i = a_i + b_i \tilde{I} + \tilde{e}_i$$

で説明できると考えるものです。それでは、単一の指標$\tilde{I}$とはどのようなものでしょうか。この点は、マーケット・ポートフォリオや、後ほど説明するCAPMとの関連も考えなければなりませんが、十分に分散投資されていれば、単一指標$\tilde{I}$の代わりに市場収益率を用いることができると考えます。具体的には、各証券の収益率を市場収益率（市場全体の収益率）と連動する部分と[2]、個別の証券固有の動きとに分けて考えるものです。

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_m + \tilde{\varepsilon}_i$$

但し、

β_iは、$\dfrac{\operatorname{cov}\left(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m\right)}{\sigma^2\left(\tilde{R}_m\right)}$で、第$i$番目の株式の相対的リスクを示すものです（詳しくは後述します）

$\tilde{R}_i$は、株式iの収益率

$\tilde{R}_m$は、市場ポートフォリオの収益率

$\tilde{\varepsilon}_i$は、誤差項

です。

ここでは、異なる株式間の誤差項は互いに無相関であることが仮定されています。つまり、各株式間に見られる連動性は、すべて市場を通しての関係で説明されると仮定されています。すなわち、

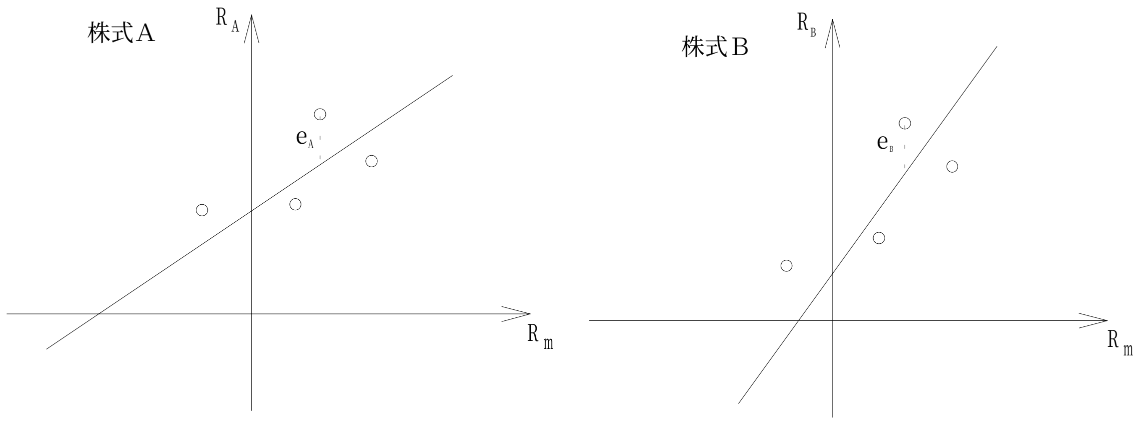
$$\tilde{\varepsilon}_i \sim N\left[0, \sigma^2\left(\tilde{\varepsilon}_i\right)\right]$$

[2]これを市場収益率で「説明できる」という表現で呼ぶことがあります

$$E\left[\tilde{\varepsilon}_i\left(R_m - E\left[R_m\right]\right)\right] = 0$$

$$E\left[\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i\right] = 0 \qquad \text{但し、} i \neq j$$

図4 マーケット· モデルの考え方



(2)マーケット・モデルを仮定した場合のリスクとリターン

期待収益率、分散、共分散はそれぞれ次のように示すことができます。

株式iの期待収益率$E\left(\tilde{R}_i\right)$は、

$$E\left(\tilde{R}_i\right) = \alpha_i + \beta_i E\left(\tilde{R}_m\right)$$

株式iの分散$\sigma^2\left(\tilde{R}_i\right)$は、

$$\sigma^2\left(\tilde{R}_i\right) = \beta_i^2 \sigma^2\left(\tilde{R}_m\right) + \sigma^2\left(\tilde{e}_i\right)$$

株式iと株式jの共分散$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j\right)$は、

$$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j\right) = \beta_i \beta_j \sigma^2\left(\tilde{R}_m\right)$$

(3)マーケット・モデルとリスクの分解

株式iの分散は、

$$\sigma^2\left(\tilde{R}_i\right) = \beta_i^2 \sigma^2\left(\tilde{R}_m\right) + \sigma^2\left(\tilde{e}_i\right) \qquad \text{(1)式}$$

なので、(1)式は、

$\sigma^2\left(\tilde{R}_i\right)$ ＝(分散投資により)消去不可能なリスク

＋(分散投資により)消去可能なリスク

という捕らえ方ができます。ここで、

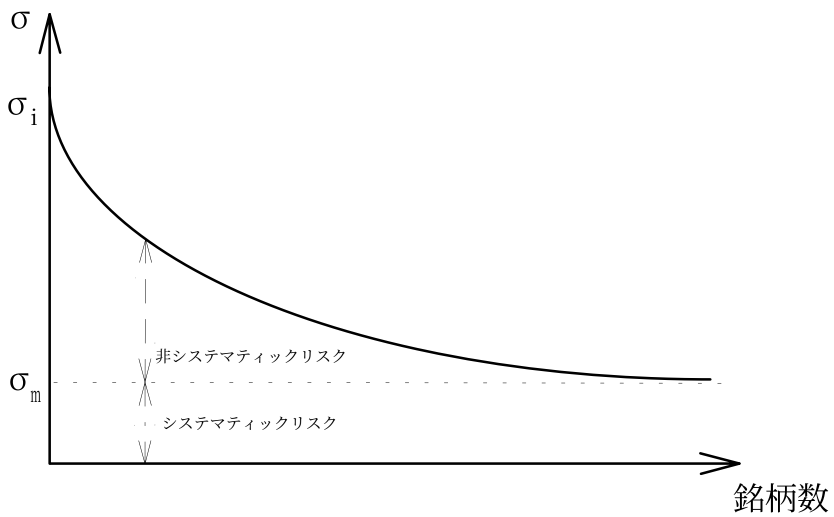
「(分散投資により)消去不可能なリスク」をシステマティック・リスク

「(分散投資により)消去可能なリスク」を非システマティック・リスク

と呼んでいます。

多数の銘柄数を含む大きなポートフォリオを編成すると、非システマティック・リスクは消滅しますから、ポートフォリオ・マネジメントにおいて株式のリスクとして意味を持つのは、$\beta_i^2\sigma^2\left(\tilde{R}_m\right)$ですが、$\sigma^2\left(\tilde{R}_m\right)$はどの株式についても共通なので、結局ベータと呼ばれるβ_iが株式のリスクを代表する尺度となります。

図5 ポートフォリオを構成する銘柄数とリスクの関係



(4) α、βの推定

マーケット・モデルでは、第i番目の株式の収益率R_iを、マーケット・ポートフォリオの収益率R_mとの関係で回帰することになります。これはちょうど、図4に示されている直線の方程式を求める作業と同じことになります。回帰モデルを

$$\tilde{R}_i = \tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i \tilde{R}_m + \tilde{\varepsilon}_i$$

とすると、定数項$\tilde{\alpha}_i$と回帰係数$\tilde{\beta}_i$の推定値$\hat{\alpha}_i$、$\hat{\beta}_i$は、

$$\hat{\alpha}_i = \overline{R}_i - \hat{\beta}_i \overline{R}_m \qquad (2)式$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \overline{R}_m\right)\left(R_{i,t} - \overline{R}_i\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \overline{R}_m\right)^2} \qquad (3)式$$

で求めることができます。さらに、回帰モデルが、現実をどの程度説明できているか

を示す決定係数 R^2 は、

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{R}_{i,t} - \bar{R}_{i,t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t} - \bar{R}_{i,t}\right)^2}$$

で計算することができます。なお、この決定係数は、$0 \leqq R^2 \leqq 1$という範囲をとることが知られています[3]。

3　資本市場理論

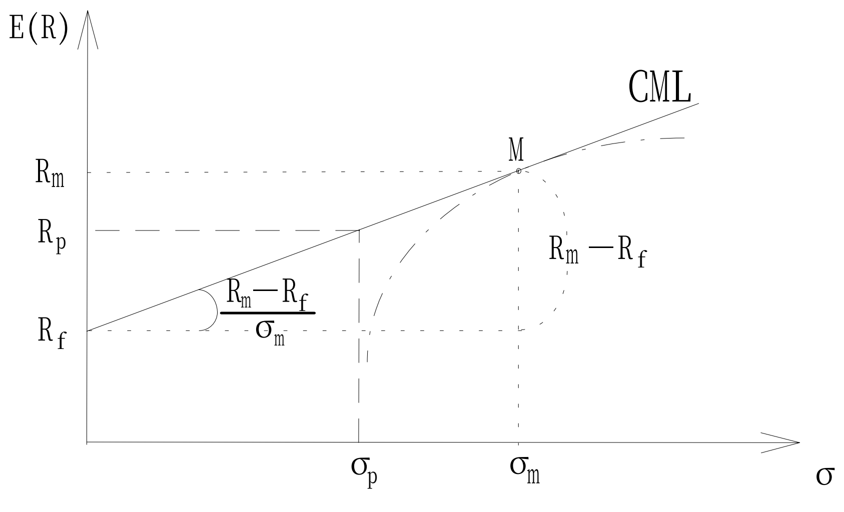
(1)効率的ポートフォリオのリスクとリターンの関係

1)資本市場線(CML)

1の(4)で述べたように、資本市場線(CML: Capital Market Line)は、次の式で表わされるものです。

$$E\left(\tilde{R}_p\right) = \left[\frac{E\left(\tilde{R}_m\right) - R_f}{\sigma\left(\tilde{R}_m\right)}\right]\sigma\left(\tilde{R}_p\right) + R_f$$

図6 資本市場線



この資本市場線の考え方は、図6からも明らかなように、マーケット・ポートフォリオの考え方を利用したものです。

[3]この点の証明は［参考］に示してあります。

(2)資本資産評価モデルと証券市場線(SML)

1)CAPMの仮定

資本資産評価モデル(CAPM：Capital Asset Pricing Model)は、次のような仮定をもとに考えられている理論です。

[仮定1]

すべての投資家は、危険回避的に行動し【危険回避者の仮定】、そしてポートフォリオを１期間保有した時に予想される期末の財産の期待効用を最大にすることを目的とする。また、投資家は、最適ポートフォリオを期末の財産額または投資収益率の期待値と標準偏差（ないし分散）という２つのパラメータにのみ基づいて選択できることを知っている。

[仮定2]

証券市場は次の意味において完全市場である。

1）すべての投資家は、彼らの取引が、その時の市場価格に影響を及ぼすほど大きくはなく、プライス・テイカーとして行動する。

2）すべての投資は完全に分割可能（１円でも投資ができる）で、完全な流動性を備えている。

3）証券の投資と保有にかかわる取引コストや税金は存在しない。

[仮定3]

株式（リスク証券）の空売りは、無制限に許容されている。

[仮定4]

すべての株式の数量は、期首において所与の定数である。

[仮定5]

すべての投資家は、株式の収益率について、相等しい将来の予想（$E\left(\tilde{R}_i\right)$、$\sigma^2\left(\tilde{R}_i\right)$、$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j\right)$）を抱いている。【同質的予想の仮定】

[仮定6]

すべての投資家は、同一の利子率R_fで、希望する額だけ貸借できる。

2)証券市場線(SML)

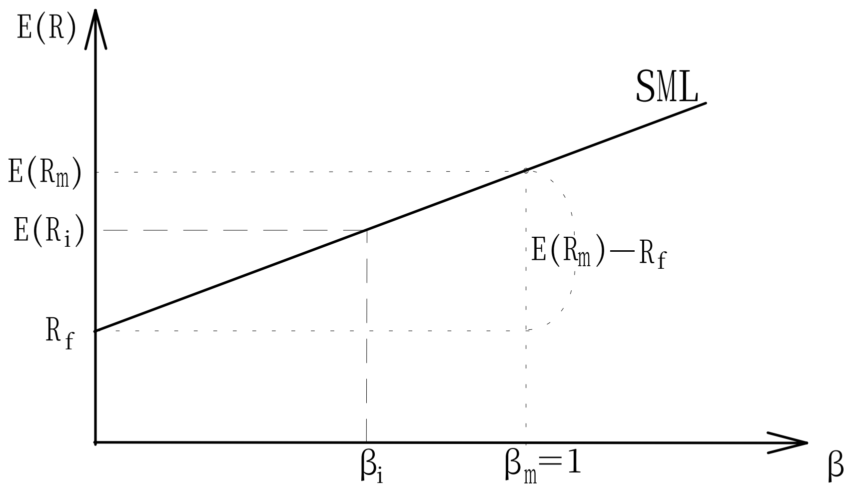
投資家が期待効用最大化を行ない、最適ポートフォリオを選択し、市場の需給が一致している時、すべての投資家は危険資産としてマーケット・ポートフォリオを選択することになります。この時の市場における第i番目の株式の収益率の期待値R_iは、とリスクβ_iの関係は、証券市場線(SML：Security Market Line)で表わされることになります。証券市場線は、次の式で表わされるものです。

$$E\left(\tilde{R}_i\right)=\left[E\left(\tilde{R}_m\right)-R_f\right]\beta_i+R_f$$

但し、$\beta_i = \dfrac{\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m\right)}{\sigma^2\left(\tilde{R}_m\right)}$ で、第i番目の株式の相対的リスクを示すものです

証券市場線は、図7で示される直線です。

図7 証券市場線



証券市場線は、リスクと収益率の平均的な関係を示すものです。$\left[E\left(\tilde{R}_m\right)-R_f\right]\beta_i$ は、マーケット・ポートフォリオのリスク・プレミアム $E\left(\tilde{R}_m\right)-R_f$ とマーケット・ポートフォリオと第i番目の株式の相対的リスク β_i をかけたもので、第i番目の株式のリスク・プレミアムを表わしています。つまり、第i番目の株式の期待収益率は、安全資産の収益率を第i番目の株式のリスク・プレミアムだけ上回ることを示すものです。

この時、リスク β_i が大きくなるほど、リスクプレミアム $E\left(\tilde{R}_m\right)-R_f$ は大きくなりますから、その分だけ期待収益率 R_i は高くなるという関係があり、しかもその関係が直線で示されているという点が特徴です[4]。

このように、CAPMは、前述した仮定の下で、市場が均衡している時のリスクとリターンの関係を示すものです。CAPMは、1960年代半ばころ、Sharpe、Lintner、Mossinなどの学者が提唱したもので、

リスクがはっきりとモデルに組み込まれている

リスクとリターンの関係が直線で示されているため分析が容易

などの理由から、学問的にも実務的にも実証分析、応用が期待され脚光を浴びることとなりました。

4このことを指して、「リスクと期待収益率の間に線型のトレード・オフ関係がある」という言い方をすることもあります。

参考　0≦R^2≦1の証明

決定係数 R^2 は、

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{R}_{i,t} - \bar{R}_{i,t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t} - \bar{R}_{i,t}\right)^2} \qquad (4)\text{式}$$

で求めることができる。ここで $\hat{R}_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i R_{m,t}$ および(2)式より

$$\hat{R}_{i,t} = \bar{R}_i + \hat{\beta}_i \bar{R}_m + \hat{\beta}_i R_{m,t}$$

$$= \bar{R}_i + \hat{\beta}_i\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right) \qquad (5)\text{式}$$

となるから、(5)式を(4)式に代入すると、(4)式は、以下のように展開できる。

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left[\left\{\bar{R}_i + \beta\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\right\} - \bar{R}_i\right]^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n}\left\{\beta\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\right\}^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}\beta^2$$

さらに(3)式を代入して、

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}\left\{\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}\right\}^2$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^2\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t} - \bar{R}_m\right)^4}$$

$$=\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t}-\bar{R}_m\right)^2\left(R_{i,t}-\bar{R}_i\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t}-\bar{R}_i\right)^2\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t}-\bar{R}_m\right)^2}$$

$$=\frac{\left\{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t}-\bar{R}_m\right)\left(R_{i,t}-\bar{R}_i\right)\right\}^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t}-\bar{R}_i\right)^2\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t}-\bar{R}_m\right)^2}$$

ここで、

$$\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_m,\tilde{R}_i\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t}-\bar{R}_m\right)\left(R_{i,t}-\bar{R}_i\right)、$$

$$\sigma^2\left(\tilde{R}_m\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{m,t}-\bar{R}_m\right)^2、$$

$$\sigma^2\left(\tilde{R}_i\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{i,t}-\bar{R}_i\right)^2$$

という関係を利用すると、

$$R^2=\frac{\left\{(n-1)\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_m,\tilde{R}_i\right)\right\}^2}{(n-1)\sigma^2\left(\tilde{R}_i\right)(n-1)\sigma^2\left(\tilde{R}_m\right)}$$

となるから、結局

$$=\left\{\frac{\mathrm{cov}\left(R_{m,t},R_{i,t}\right)}{\sigma\left(R_{i,t}\right)\sigma\left(R_{m,t}\right)}\right\}^2$$

となり、$\frac{\mathrm{cov}\left(\tilde{R}_m,\tilde{R}_i\right)}{\sigma\left(\tilde{R}_i\right)\sigma\left(\tilde{R}_m\right)}=\rho$ なので、

$$R^2=\left\{\rho\left(\tilde{R}_i,\tilde{R}_m\right)\right\}^2$$

という関係があることがわかる。ここで、$-1\leqq\rho\left(\tilde{R}_i,\tilde{R}_m\right)\leqq 1$なので

$$0\leqq R^2\leqq 1$$

であることが明らかになった。